

Kvaszova filosofie matematiky mezi platonismem a naturalismem

Jaroslav Peregrin

Ve svém článku *Matematika a skúsenosť* (2009) předkládá Ladislav Kvasz pohled na matematiku, který je do jisté míry 'pragmatistický' či 'naturalistický' a mně osobně je velmi sympatický. Jenom si myslím, že je škoda, že je naturalistický právě jenom "do jisté míry". Mám pocit, že Kvasz stále ještě zůstává jednou nohou stát v matematickém platonismu (který je samozřejmě svým způsobem naprosto přirozený) a směrem k naturalismu se zatím rozkročil jenom tou druhou. Ale myslím, že dlouho takto rozkročen stát nelze (ostatně i kolos rhódský to nakonec nevydržel a už dávno odpočívá někde na dně moře), a tak bych ho chtěl pohnout k tomu, aby své těžiště přesunul zcela na tu či onu stranu. Abych se vyhnul nechtěným konotacím spojeným s termíny, jako jsou *platonismus*, *pragmatismus* a *naturalismus*, budu ona dvě stanoviska, mezi kterými podle mého názoru kolega Kvasz kolísá, nazývat *realismem* a *antirealismem*¹: *realismem* budu rozumět zhruba řečeno názor, že matematická realita je daná nezávisle na nás a my ji jazyky matematiky jenom *popisujeme*, zatímco *antirealismus* budu říkat stanovisku, že tyto jazyky matematickou realitu v nějakém smyslu toho slova spoluutvářejí.

Kolega Kvasz se během let dopracoval k naprosto originálnímu pohledu na historii matematiky jakožto na historii vývoje určitých jazykových forem, který se odehrává v podobě jistého 'dialektického' pohybu. Tato teorie, kterou teď ve zcela ucelené podobě prezentoval ve své knize *Patterns of change* (2008)² vykládá vývoj matematiky jako postupné překonávání mezi jednotlivých symbolických systémů, v jejichž rámci byla matematika historicky provozována. V článku, na který nyní reaguji, z toho pak Kvasz vyvozuje některé pozoruhodné důsledky s ohledem na povahu matematiky. Těmito důsledky jsou zejména následující čtyři (formulované jeho vlastními slovy):

1. "matematická skúsenosť je intstrumentálná, sprostredkovaná artefaktami"
2. "svet matematiky ... [je] svet konštituovaný nástrojmi symbolickej reprezentácie"
3. "matematické poznanie ... nie je apriórne v Kantovom zmysle"

¹ Tyto dva termíny jsou sice zase poněkud spojeny se specificky dummettovským přístupem k filosofii logiky a matematiky (o který mně zde také vůbec nejde), zdá se mi však, že budou zavádějící méně nebezpečným způsobem než ty předchozí.

² Jsem velmi zvědav, zda Kvaszova hluboce originální kniha vydaná v prestižním mezinárodním nakladatelství vyvolá v naší slovensko-české filosofické komunitě ohlas srovnatelný alespoň s tím, jakého se dostává různým těm 'veledílům', které si mi sami navzájem vydáváme a chválíme.

4. "matematika je poznáváním objektivního světa konstituovaného pomocí nástrojů symbolické a ikonické reprezentace"

Chci zdůraznit, že jsem poněkud zaujatě vybral zejména ty Kvaszovy formulace, které jeho pohled charakterizují skutečně jako antirealistický a ve kterých se zračí skutečný odklon od realistického chápání matematiky. To jsou teze, pod které bych se i já podepsal. Problematická se mi však zdá být skutečnost, že v Kvaszově článku se najde i spousta formulací, které s těmito body nejdou tak docela dohromady, a které prozrazují, že část Kvaszovy mysli o matematice přemýšlí ještě stále zcela realisticky. Na ně bych chtěl v následujícím textu upozornit a přimět tak autora k tomu, aby vyjasnil, jak to všechno skutečně myslí. Myslím, že jeho filosofie matematiky je natolik originální, že si zaslouží domyšlení do všech svých filosofických důsledků.

Abych předešel nedorozumění: realistický výklad matematiky je, jak už jsem konstatoval, přirozený a v mnoha kontextech to může být ten nejlepší způsob, jak se na matematiku dívat. Vidět například algebru jako zkoumání abstraktních struktur, které nejsou nijak závislé na matematicích, kteří je zkoumají, jistě není ničím, co bychom měli chtít nějak vykořeňovat. Problémy s realismem však, zdá se mi, vyvstávají, když se začínáme obracet k otázkám, jako je *Kde se matematika vzala?* či *Jak přišly matematické výrazy ke svému významu?* Realismus je nás potom totiž náchylný vést k odpovědím typu *Inu objevili jsme taková a taková čísla či takové a takové struktury a ty jsme si nějak pojmenovali*; přičemž ono objevování je vykládáno jako věc nějakých mentálních výletů do matematických krajín, které se z hlediska epistemologie zas až tak neliší od skutečných výletů do krajín opravdových, na nichž objevujeme nikoli čísla a struktury, ale rostliny, živočichy či dosud nám neznámé národy. V tomto kontextu je pak, myslím, dobré zdůrazňovat, že realistický výklad matematiky je pouhou metaforou – sice přirozenou, užitečnou a rozšířenou, ale přece jenom metaforou³.

Začněme Kvaszovým bodem 1. Autor říká, že matematická zkušenost je zprostředkovaná nástroji – podobně jako například zkušenost fyzikální⁴. Problém je ovšem v tom, že tohle může, zdá se mi, znamenat dvě různé věci. Ve slabším smyslu slova "zprostředkování" nám nástroje umožňují poznávat něco navíc oproti tomu, co poznáváme i bez nich, něco, co tu sice

³ Na jiných místech (viz zejména Peregrin, 1999, §8.5; 2000) jsem celou situaci charakterizoval prostřednictvím rozlišení mezi 'světem přirozeného' a 'světem formálního'. Matematiku můžeme v mnoha ohledech vidět prostě jako prostě věc potýkání se s tím druhým; dostaneme-li se však k otázce, kde se tento 'svět formálního' bere, nemůžeme než popsat, jak se skrz naše praktiky a posléze definice rodí v lůně 'světa přirozeného'.

⁴ Kvasz připisuje tezi o instrumentální povaze zkušenosti zprostředkované moderní vědou Husserlovi, což mi nepřipadá úplně případné, neboť přímo tohle téma se mi nezdá být v rámci Husserlovy filosofie nijak patrné (alespoň pokud jde o jeho *Krizi evropských věd*, kterou znám podrobněji). Bez ohledu na tohle má ale Kvasz, myslím, pravdu v tom, že hovořit o takové tezi v souvislosti s Galileem a spol. nepřipadné není (viz Kvasz, 2000).

je tak i tak, k čemu se my ale bez takových nástrojů nedokážeme dostat. Například mikroskop nám může ukázat bakterie, které jsou bez ohledu na to, zda my mikroskop máme nebo nemáme, stejně reálné jako třeba sloni, a které na rozdíl od slonů nedokážeme pozorovat jenom proto, že na to nejsme fyziologicky zařízeni.

Je tu ale i silnější způsob, jak ono "zprostředkování" číst. Můžeme si představit, že *každá* lidská zkušenost je poznamenána tím, jaké smyslové orgány či externí nástroje pro její vnímání používáme. Z tohoto hlediska pak vlastně nelze říci, že tato zkušenost existuje nezávisle na nás, protože naše zkušenost je vždy věcí interakce mezi světem a naším poznávacím aparátem. (To je samozřejmě stanovisko, které je historicky spojováno zejména s Kantem.) Z tohoto hlediska nám nástroje nezprostředkovávají přístup k něčemu, co je tu nezávisle na nich, nýbrž jsou vzhledem k oněm zprostředkujícím poznatkům *konstitutivní*.

Tím se dostáváme k bodu 2. Kvasz ho formuluje tak, jako by se hlásil k té druhé, silnější verzi čtení výroku o roli nástrojů v rámci nabývání matematické zkušenosti. Problém je ovšem v tom, že jinde v textu se Kvasz vyjadřuje tak, jako by mu šlo jen o ten slabší smysl, jako by nám nástroje jenom umožňovaly poznat něco, co tu je nezávisle na nich a na co jenom nejsme schopni bez těchto nástrojů dohlédnout. "Každý reprezentačný nástroj," říká například, "uchopuje z matematického univerza jenom určitý fragment." To navozuje realistickou představu matematického univerza jako něčeho nezávislého na nás, z čeho ale můžeme shlédnout vždy jenom určitý kousek, podle toho, jaké prostředky použijeme. "Matematika vytvorením nových nástrojů symbolické a ikonické reprezentácie," říká Kvasz na jiném místě, "... otvára vstup do nových svetov, ktoré boli pre staršie nástroje neprístupné." Pokud to nemá být pouhá metafora, pak to opět vypadá, jako by nástroje matematiky nesloužily ke *konstituci* nové zkušenosti, ale jenom k jejímu zprostředkování. A do třetice: "Až keď vznikne určitý nástroj, stane sa určitá oblasť symbolickej skúsenosti prístupnou."

Tohle všechno úzce souvisí s bodem 3. Ten Kvasz odůvodňuje tím, že "[matematické poznanie] závisí od reprezentačných nástrojov, ktoré sú kontingentné, lebo sú kultúrnym artefaktom". Platnost tohoto argumentu opět podstatným způsobem závisí na tom, jak si máme představit onu závislost. K tomu, aby člověk vynásobil dvě pětimístná čísla, obvykle potřebuje papír a tužku, z toho by ale byl málokdo ochoten vyvodit závěr, že násobení je zprostředkované nástroji v nějakém natolik *zásadním* smyslu, aby to mohlo opodstatňovat nějaké závěry o apriorní či aposteriorní povaze matematiky. Jde tedy o to, nakolik *zásadně* matematické poznání na nástrojích závisí – a já bych byl náchylný se domnívat, že ona zásadnost, o kterou tu jde, nemůže spočívat v ničem jiném než v tom, že nástroje předmět poznání matematiky nikoli pouze zprostředkovávají, ale konstituují.

Pokud jde o bod 4., tady se dostáváme k nutnosti vyjasnění, jak přesně Kvasz myslí svou analogii matematiky s fyzikou. Fyzika má nepochybně co dělat s reálným, hmatatelným světem, a nástroje, které používá, mají co dělat s dobýváním poznatků týkajících se

bezprostředně tohoto světa. Nyní by bylo třeba vyjasnit, co je na místě tohoto světa v případě matematiky: chápe Kvasz matematiku jako úsilí o objevování téhož reálného, hmatatelného světa, s nímž má co dělat fyzika, nebo ji chápe jako věc zkoumání nějakých abstraktních světů ('světů', ve kterých nacházíme čísla, funkce atd.)? Mnohé, co Kvasz v článku píše, by nasvědčovalo oné první variantě: když například hovoří o tom, že nám "matematika otvárá přístup k javom a súvislostiam, ktoré by bez týchto nástrojov ostali navždy nepoznateľné", má na mysli nepochybně jevy a zkušenosti reálného světa; na jiných místech však hovoří například o tom, že nám systém arabských čísel "*otvoril prístup* k hodnote čísla π na 60 miest" a algebraická symbolika "*otvorila prispup* k riešeniu kubických rovníc".

Problematický mi také připadá způsob, jakým Kvasz hned od počátku charakterizuje *rozdíl* mezi nástroji, které používá fyzika, a těmi, které používá matematika. O těch druhých, na rozdíl od těch prvních, hovoří hned od počátku jako o "nástrojích symbolické a ikonické reprezentácie". To se mně zdá být snad vůbec nejproblematictější rysem jeho přístupu. Jedna věc je, že pojem "symbolické reprezentace" je natolik neprůhledný, že nemůže než celou věc jenom zamlžit. Co z něčeho dělá "nástroj symbolické reprezentace"? Zdá se mi, že Kvasz se musí pojmů, jako je "symbolický" a "reprezentace" buďto vzdát, nebo musí velice detailně objasnit, co jimi myslí (což je, obávám se, téma na samostatnou knihu ...).

Ještě podstatnější je to, že charakterizací matematických nástrojů jako "nástrojovou reprezentácie" už od počátku dává oněm nástrojům, které jsou protipólem měřících přístrojů fyziků, do vínku jistý pasivní charakter. Zatímco nástroje fyziků jsou něčím, co je se světem často skutečně v aktivní interakci, nástroje matematiků se takhle zdají být něčím dosti odlišným: něčím, co skutečnost (ať už jí má být nějaký aspekt reálného světa, nebo nějaký svět platónský, abstraktní) jenom 'odráží'. Tím se také zdá padat možnost, že by tyto nástroje naši zkušenost konstituovaly – jsou-li to nástroje *reprezentování*, pak nekonstituují, nýbrž reprezentují, a to, co reprezentují, tu musí už nějak hotové být. Zdá se mi tedy, že tímto přístupem rozlišování mezi nástroji fyziky a nástroji matematiky vrhá Kvasz na analogii mezi fyzikou a matematikou světlo, ve kterém se nejeví až tak zajímavá.

Zcela problematický se mi v této souvislosti zdá pak být Kvaszův výrok, že "Vedľa smyslovej skúsenosti, ktorú máme spoločnú se zvieratami, má človek špecifickú schopnosť vnímať zmysel (gest, jazyka, symbolov) a nadobúdať symbolickú skúsenosť." Problém toho, v jakém smyslu můžeme hovořit o něčem jako "vnímání smyslu", je natolik komplexní a jeho souvislost s filosofií matematiky je natolik problematická, že brát ho za základ výkladu povahy matematiky mi připadá jako zářný příklad výkladu *obscurum per obscurius*. (Tady se mi zdá na povrch vystupovat Kvaszovo někdejší uhranutí Husserlem - či Husserlem předzpracovaným Vopěnkou? -, které se mi ale zdá být opět s oním naturalismem, ke kterému v diskutovaném článku směřuje, ne příliš slučitelné.)

Mně osobně se zdá, že zajímavější by bylo podívat se na matematiku jako na něco, co se vyvinulo ze zvuků, jako jsou "jedna", "dvě", "více", "méně" ap., jakožto skutečných nástrojů počítání a kolektivních aktivit s počítáním spojených. Samozřejmě, že pro matematiku je charakteristické, že tyto nástroje postupně systematizovala do soustav, které již pak byly nástroji spíše v přeneseném smyslu a u nichž pak už dává smysl hovořit o symbolizování či reprezentování. (Takhle bychom ale symbolizování a reprezentování matematických výrazů nebrali jako nějaký primitivní pojem, ale naopak bychom mohli mít ambice ustanovení takové funkce matematického výraziva *vysvětlit*.) Zdá se mi, že k vysvětlování rozdílu mezi nástroji fyziky a matematiky by se pak dalo přistoupit na bázi toho, že matematika má inherentní tendenci se posouvat jaksi 'nad' své nástroje a stávat se do jisté míry jakýmsi 'meta-počty'.

Kvasz ovšem na to, že lavírování mezi realismem a antirealismem je jistým druhem tance mezi vejci, občas naráží. Například hned v úvodu článku, když hovoří o fyzice, konstatuje, že "proces merania nie je cestou k nezávisle existujúcemu javu, lebo proces merania vstupuje do konštitúcie javu samotného", což, přeneseno, tak jak to Kvasz chce, na matematiku, dává docela jednoznačně antirealistické krédo⁵. Kvasz se ovšem pokouší tento antirealismus hned otupit (nebo mu možná jenom zablokovat cestu k přerůstání do nějakého bezbřehého relativismu?) tak, že dodává, že matematické obdoby měřících přístrojů, matematické "nástroje symbolickej reprezentácie", jsou "vybudované tak, že $135664 + 37863 = 173527$ vyjde vždy rovnako". Takže měřící přístroje si můžeme vybrat jak chceme, naměříme ale vždy totéž.

To ale celou situaci nemístně trivializuje. To, co opodstatňuje, abychom říkali, že "proces merania vstupuje do konštitúcie javu", je podle mne fakt, že různými přístroji můžeme naměřit *různé* věci. Co může znamenat, že všechny matematické teorie jsou "vybudované tak, že $135664 + 37863 = 173527$ vyjde vždy rovnako"? Určitě to nemůže znamenat, že v každé matematické teorii bude pravdivý výrok " $135664 + 37863 = 173527$ " – pravdivost tohoto výroku bude záležet na tom, jaký význam budou mít v rámci dané teorie ony symboly, ze kterých je složen (například budeme-li se pohybovat v aritmetice *modulo* 150 000, pravdivý nebude). Takže Kvaszovo tvrzení by mohl být pravdivý jedině tehdy, když bychom ho interpretovali tak, že říká něco takového, jako že v každé teorii bude pravdivý výrok, který bude mít stejný význam jako výrok " $135664 + 37863 = 173527$ " naší běžné aritmetiky.

⁵ Na jiném místě říká: "V matematike už nejde o to, že by sme pre zložitost' zápisu neboli v stave určité iracionálně číslo (...) prostriedkami elementárnej aritmetiky zapísať, ale o to, že ono se konečnou postupnosťou znakov jazyka elementárnej aritmetiky objektívne nedá vyjadriť. Situácia pripomína Heisenbergov princíp neurčitosti, kde tiež nejde o to, že by sme kvôli našej obmedzenosti neboli schopní súčasne namerat' ostrú hodnotu súradnice a hybnosti, ale o to, že to objektívne nie je možné." Toto přirovnání se mi však zdá pokulhávat – zatímco v případě Heisenbergova principu neurčitosti jde o to, že nic takového nejde naměřit z žádným nástrojem, vyjádřit iracionální číslo nedokážeme pouze proto, že se omezujeme na určité nástroje ("prostriedkami elementárnej aritmetiky").

Tohle pak vede k obecnému závěru, že ač různými přístroji můžeme skutečně naměřit různé věci, může k tomu dojít *jenom tehdy, když měříme různé veličiny* - a to je triviální. Jak říká sám Kvasz, "volba reprezentativního nástroje nemůže ovplyvnit hodnotu veličiny". Pokud bude daná teorie obsahovat ekvivalent výroku " $135664 + 37863 = 173527$ ", pak tam bude pravdivý (a pokud ho obsahovat nebude, pak není co řešit). Tohle ale znamená, že *veličiny* (či specifičtěji *sčítání*) nahlédneme jako něco, co existuje nějak mimo teorie (a teorie tedy může takovou veličinu pouze buďto zahrnout, nebo vynechat). To ale celou situaci, zdá se mi, skutečně trivializuje: veličiny jsou podle mne vymezovány *v rámci* teorií, nikoli nezávisle na nich. A rozhodnout, zda lze veličinu v rámci jedné teorie ztotožnit s veličinou nějaké jiné teorie, může být velmi netriviální - a já bych skoro řekl, že právě do této otázky se koncentruje nikoli ne podstatná část problémů filosofie vědy a zvláště matematiky.

Potřebujeme tedy kritérium pro to, kdy má výrok jedné teorie stejný význam jako výrok jiné teorie. (Takové kritérium samozřejmě máme, pokud přijmeme realistickou představu, že výrazy všech matematických teorií prostě pojmenovávají prvky nějakého univerzální abstraktní reality; tohle ale můžeme s těžší smysluplně předpokládat, je-li realismus právě tím, co se snažíme opodstatnit či zpochybnit.) Kromě toho musíme připustit, že jiné teorie nemusejí vůbec žádný výrok, který má úplně stejný význam jako nějaký výrok té naší, obsahovat. (Tak alespoň já rozumím tezi instrumentální konstrukci zkušenosti – pomocí jedné sady nástrojů budu získávat jiné druhy poznatků než jsou ty, které budu získávat pomocí druhé; jakkoli pomocí každé z nich mohu získat 'stejně dobré' poznání⁶.)

Poslední poznámka se týká Kvaszovy kritiky logicismu. Aniž bych chtěl logicismus jako takový hájit, zdá se mi způsob, jak ho Kvasz vykládá, poněkud zavádějící. Podle něj jde v podstatě o "tvrdenie, že súčasná matematika je *navždy viazaná na reprezentatívny rámec formálnej logiky* a v rozpore s celými jejimi dejinami už žádný nový reprezentatívny nástroj nevytvorí". Tohle ale vychází z předpokladu, že "predikátový počet je jedným z nástrojov symbolickej reprezentácie, ktoré spolu konštituuju svet matematiky", který podle mne není úplně přesný; opírá se totiž o něco, co se mi jeví být rylovskou "kategoriální chybou". Zatímco matematickou zkušenost (podle Kvasze) konstituují *jazyky*, v rámci predikátového

⁶ V této podobě to začíná připomínat přístup Carnapa a logických empirismů k výkladu lidského poznávání vůbec. Carnap měl pocit, že naše poznatky na nás nejsou nezávislé v tom smyslu, že naše teorie jsou vždy jazykovým útvarem a my tedy můžeme poznávat až tehdy, když máme - takový či onaký - jazyk. (Carnap byl ovšem přesvědčen, že jazyk, a dokonce i logiku, si můžeme volit *zcela libovolně* – to je jeho známý *princip tolerance* - viz zejména jeho *Logická syntax jazyka*.) Jakmile je však jazyk zafixován, je na světě, aby rozhodl, které z výroků takto fixovaného jazyka jsou pravdivé – to už my ovlivnit nemůžeme (a v tomto smyslu je tedy svět objektivní a na nás nezávislý). Takto vedená hranice mezi ustanovením jazyka (které musí předcházet jakýmkoli empirickým zkoumáním) a ustanovováním pravdivosti jeho výroků ovšem není ničím jiným než hranicí mezi analytickým a syntetickým, na jejíž problematičnost pak poukázal Quine.

počtu se setkáváme s něčím, co je pouhou *jazykovou formou*. (Je pravda že v jazyce s touto formou často zacházíme jako se svého druhu jazykem, *formálním jazykem*, to by nás ale nemělo zmást natolik, abychom takový jazyk kladli naroveň skutečných jazyků, s jakými se setkáváme třeba v rámci matematiky.) Skutečným jazykem, který má tuto formu je například jazyk (prvořádové) Peanovy aritmetiky.

Z daného hlediska můžeme říci, že cílem logiky je zachytit základní struktury čehokoli, co může být smysluplně nazýváno jazykem. Ambicí logiků tak, zdá se mi, určitě není nalezení nějakého definitivního *jazyka*, ale nanejvýše nějaké definitivní *formy*, kterou musejí mít všechny smysluplné jazyky. (A není mi jasné, že by v podstatě všechny ony konkrétní matematické jazyky, které Kvasz spojuje s různými stádii vývoje matematiky, nemohly být viděny jako jazyky formy, kterou explikuje predikátový počet.) Nechci zde hájit tezi, že se logikům tento úkol daří plnit, ani že je vůbec splnitelný; chci jenom poukázat na to, že Kvaszovo chápání logiky může být zavádějící.

Logicismus se mi tedy zdá být spíše tezí, že veškerá matematika je už implicitně obsažena právě v této logické formě a nijak k ní nepřispívají konkrétní 'obsahy', kterými je tato forma v rámci konkrétních jazyků naplňována. (To je ovšem tvrzení značně kontroverzní, a pokud se Kvaszovi logicismus v *této* podobě nebude líbit o nic víc než v té, jakou mu dává sám, nebude se tomu příliš divit.)

Mám tedy, jak je vidět, v tom, co Kvasz v probíraném článku píše, mnoho nejasností a mám k tomu i některé výhrady. To by ale nemělo zastřít fakt, že jeho text vnímám jako skutečně objevný a jeho filosofii matematiky jako něco v našich zeměpisných šířkách a délkách velmi neobvyklého - jako výsledek na jedné straně velice pečlivého promyšlení historických i současných pramenů, a na druhé straně skutečně originálního a nezatíženého otevírání nových pohledů.

Literatura.

CARNAP, R. (1934): *Logische Syntax der Sprache*, Vienna: Springer.

HUSSERL, E. (1954): *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie*. Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie (ed. W. Biemel). Haag: Martinus Nijhoff; český překlad *Krise evropských věd a transcendentální fenomenologie*, Praha: Academia, 1972.

KVASZ, L. (2000): *Galileovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenologie*. Filosofický časopis 48, 373-399.

KVASZ, L. (2008): *Patterns of change: linguistic innovations in the development of classical mathematics*, Basel: Springer.

KVASZ, L. (2009): *Matematika a skúsenosť*. ORGANON F 16, 146-182.

PEREGRIN, J. (1999): *Význam a struktura*, OIKOYMENH, Praha; přepracovaná anglická verze *Meaning and structure*, Aldershot: Ashgate, 2001.

PEREGRIN, J. (2000): *The 'Natural' and the 'Formal'*. Journal of Philosophical Logic 29, 75-101.

Filosofický ústav AV ČR

Jilská 1

110 00 Praha 1