

Odkud se berou axiomy logiky?

JAROSLAV PEREGRIN¹

Oddělení logiky. Filosofický ústav Akademie věd České republiky, v.v.i.
Jilská 1. 110 00 Praha 1. Česká republika
jarda@peregrin.cz

ZASLÁN: 02-12-2012 • AKCEPTOVÁN: 15-03-2013

Abstract: Systems of axioms for elementary logic we can find in textbooks are usually not very transparent; and the reader might well wonder how did precisely such a set of axioms come into being. In this paper we present a way of constituting one such non-transparent set of axioms, namely the one presented by E. Mendelson in his *Introduction to Mathematical Logic*, in a transparent way, with the aim of helping the reader to get an insight into the workings of the axioms.

Keywords: Axioms – logic – natural deduction – negation.

1. Jak – k čertu – Mendelson přišel zrovna na tyhle axiomy??

Když se v učebnicích logiky seznamujeme s nějakým logickým kalkulem (ať už je to běžná, standardní logika, nebo nějaký méně běžný kalkul), jsou nám obvykle předloženy jeho axiomy. Proč má daný kalkul právě takové, a ne jiné axiomy? Obvykle je dokázáno, že tyto axiomy odpovídají příslušné sémantice, to jest, že kalkul, založený na těchto axiomech, je *korektní a úplný*. (To je ovšem možné jenom v případě kalkulu, jehož jazyk má nějakou samostatnou sémantiku, jako ji třeba má klasická logika – v opačném případě, jako například v případě intuicionistické logiky, jsou

¹ Práce na tomto textu byla podpořena grantem GAČR č. 13-21076S „Základy logiky ve světle nových výsledků filosofie a vědy“.

axiomy odůvodňovány nějak jinak.) Důkazy korektnosti a úplnosti ovšem nebývají příliš přehledné a příliš hluboký vhled do povahy axiomů nám obvykle nezjednájí.

Vezměme například systém axiomů klasické predikátové logiky, který předkládá ve svém úvodu do (matematické) logiky Mendelson (1964):

$$\begin{aligned} &(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \\ &((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow C))) \\ &((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow B)) \rightarrow A)) \\ &\forall x A \rightarrow A[a/x], \text{ kde } A[a/x] \text{ značí formuli } A \text{ se všemi výskyty } x \text{ nahraze-} \\ &\text{nými } a \\ &\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B), \text{ jestliže } A \text{ neobsahuje } x \end{aligned}$$

Odvozovacími pravidly jsou generalizace a *modus ponens*:

$$\begin{array}{l} A / \forall x A \\ A, (A \rightarrow B) / B \end{array}$$

Jak se k takovým axiomům dopracovat? Proč vypadají právě tak, jak vypadají?

V knize, kde jsou tyto axiomy prezentovány, je samozřejmě možné najít jisté vysvětlení – je tam totiž důkaz korektnosti a úplnosti tohoto kalkulu (vzhledem k běžné sémantice klasické logiky), a my můžeme stopovat, kde a jak se v tom důkazu tyto axiomy a pravidla vyskytují a tímto způsobem získat odpověď na otázku, proč potřebujeme právě je.

Tato odpověď se mi ale nezdá být úplně uspokojivá, a tak se v tomto článku pokusím ukázat jinou cestu, jak se k právě těmto axiomům můžeme dopracovat, cestu, která vede přes budování logického systému klasického predikátového počtu v malých, průhledných krůčcích.

V tomto článku budu předpokládat, že logika je primárně něco tak přízemního jako technika obhospodařování pravd, které získáváme nezávisle na ní. Představme si, že pracuji v reklamní agentuře a dostanu telefonní seznam, ve kterém jsou zaškrtnána jména, na něž mám soustředit nějakou reklamní kampaň. Těch jmen je spousta a já hledám cesty, jak si jich co nejvíce zapamatovat; extrémně užitečný by pro mě byl nějaký algoritmus, který by mi dovolil je všechny vygenerovat. Takže přijdu-li například na to, že všechna ta jména jsou vymezitelná nějakým předpisem (odpust'te mi fantasknost takové představy), například „Vezmi znaky *Pe*, *Kla* nebo *A*, přidej k nim *b* nebo *r*, ...“, bude to pro mne velmi užitečné. A logika, jak na ni

nahlížím tady, je obecná teorie takového „managementu“, nikoli ovšem jmen potenciálních zákazníků, ale našich poznatků, to jest výroků, které máme za pravdivé.

Z hlediska tohoto článku ovšem není příliš podstatné, jak moc toto velmi přizemní chápání logiky bereme vážně. (Já mám pocit, že na logiku je užitečnější se dívat takto, než v ní vidět třeba teorii nejobecnějších struktur světa nebo lidské mysli; ale zde není místo, kde bych mohl vysvětlovat proč.)

2. Jazyky a vyčleněné výroky

Zdá se mi, že spojka, která je z hlediska logiky naprosto průzračná, je konjunkce. Ta se chová prostě tak, že je odvoditelná z obou svých konjunk-tů a kterýkoli z těchto konjunk-tů je odvoditelný z ní. A protože víme, že klasickou logiku lze postavit na konjunkci a negaci, zdá se, že celý problém axiomatizace se může zkoncentrovat do problému, jak k průhledné axiomatizaci konjunkce přidat axiomatizaci negace. To mě vede k tomu, že začnu s těmito dvěma spojkami, takže k Mendelsonově axiomatizaci s implikací se budu pracovat oklikou.

Uvažme velmi jednoduchý jazyk prvního řádu, jehož slovník je tvořen individuovými konstantami **Azor**, **Brok** a **Pašík** a unárními predikáty **pes**, **kůň** a **vepř**. Máme devět výroků:

pes(Azor), **pes(Brok)**, **pes(Pašík)**, **kůň(Azor)**, **kůň(Brok)**, **kůň(Pašík)**,
vepř(Azor), **vepř(Brok)**, **vepř(Pašík)**

Předpokládejme, že tři z těchto devíti výroků jsou vyčleněné (to jest ‚pravdivé‘); konkrétně **pes(Azor)**, **pes(Brok)**, **vepř(Pašík)**; ostatní jsou nevyčleněné. Vyčleněné výroky si můžeme prostě sepsat do seznamu, do kterého můžeme, kdykoli budeme postaveni před úkol rozhodnout o tom, zda je některý z výroků tohoto jazyka vyčleněný, jednoduše nahlédnout.

Představme si ale, že tento jazyk rozšíříme o spojku \wedge , která, jak bývá zvykem, reglementuje² českou spojku *a*. Výroků tedy teď už bude neomezený počet, a my už tak nemůžeme udělat jejich úplný seznam. Takový seznam ale jistě můžeme udělat nepřímou: můžeme zadat instrukci, jak ho – potenciálně – vygenerovat. Zjevně stačí, když k výše uvedenému seznamu

² Pojem reglementace používám ve smyslu, v jakém ho zavedli Svoboda – Peregrin (2009).

devíti elementárních výroků přidáme pravidlo, že kdykoli máme na seznamu vyčleněných výroků nějaké dva výroky, je tam třeba přidat i výrok, který vznikne jejich spojením pomocí \wedge .

Jak by měl nyní vypadat seznam všech *vyčleněných* výroků? Má-li spojka \wedge fungovat, jak je běžné, podobně jako a , pak by měl asi vypadat tak, že by obsahoval výrok tvaru $A \wedge B$ právě tehdy, když by obsahoval i obě jeho součásti, A a B . Předpokládáme-li, že můžeme vyjít ze seznamu všech jednoduchých vyčleněných výroků, pak takový seznam všech vyčleněných výroků v tomto jazyce zřejmě můžeme vyrobit tak, že k němu budeme přidávat konjunkci každých dvou výroků, které na něm už jsou. Pravidlo pro takové přidávání zapíšeme následujícím způsobem:

$$(\wedge I) A, B \vdash (A \wedge B)$$

Říkejme jazyku, ke kterému jsme se takto dopracovali, $(J\wedge)$.

Jazyk $(J\wedge)$

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok; přičemž jmény jsou **Azor**, **Brok** a **Pašík**, a predikáty jsou **pes**, **kůň** a **vepř**.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. **pes(Azor)**, **pes(Brok)**, **vepř(Pašík)**
2. Jsou-li A a B vyčleněné, je vyčleněný i $(A \wedge B)$; zkráceně $(\wedge I) A, B \vdash (A \wedge B)$

Na vygenerování nějakého výroku pomocí pravidel generování seznamu vyčleněných výroků se ovšem také můžeme dívat jako na jeho *důkaz*. Vezměme například výrok **(vepř(Pašík) ∧ pes(Brok)) ∧ vepř(Pašík)**. Dokázat ho můžeme následujícím způsobem:

- | | |
|---|-------------------------------|
| 1. vepř(Pašík) | vyčleněný jednoduchý výrok |
| 2. pes(Brok) | vyčleněný jednoduchý výrok |
| 3. vepř(Pašík) ∧ pes(Brok) | z 1. a 2. pomocí $(\wedge I)$ |
| 4. (vepř(Pašík) ∧ pes(Brok)) ∧ vepř(Pašík) | z 3. a 1. pomocí $(\wedge I)$ |

3. Co na seznamu být nemá

Pravidlo (\wedge I) nám zaručuje, že budeme-li vycházet ze seznamu všech vyčleněných jednoduchých výroků, budeme mít na seznamu i všechny konjunkce, které chceme vyčlenit. Abychom tam ovšem měli *jenom* je (a ne navíc také třeba nějaké z těch, které vyčlenit nechceme), musíme tento seznam generovat *pouze* pomocí pravidla (\wedge I). To znamená, že na seznam nemáme přidávat $(A \wedge B)$, aniž by tam už byly i A a B .

Abychom tohle vyjádřili zase pomocí pravidel, museli bychom do hry vzít pravidla pro to, co na seznam vyčleněných výroků *nepatří*. Taková pravidla se normálně v logice nevyskytují – zavést bychom je ovšem mohli. Mohli bychom například psát

$$\begin{aligned} (\wedge E1^*) \quad & A \dashv (A \wedge B) \\ (\wedge E2^*) \quad & B \dashv (A \wedge B) \end{aligned}$$

a číst to *nepatří-li na seznam A (resp. B), pak tam nepatří ani $(A \wedge B)$* . Alternativně bychom mohli uvažovat o generování – vedle seznamu vyčleněných výroků – i paralelního seznamu *nevyčleněných* výroků a vzít uvedená pravidla jako pravidla pro generování tohoto seznamu. (Výroky, které *patří* na seznam *nevyčleněných* výroků, jsou přitom samozřejmě ty, které *nepatří* na seznam *vyčleněných* výroků.)

Přidáme-li tato dvě pravidla k pravidlu (\wedge I), dostaneme už jednoznačné vymezení seznamu všech vyčleněných výroků jazyka ($J\wedge$)? Za předpokladu, že máme dán seznam všech vyčleněných *jednoduchých* výroků, pak zřejmě ano: pravidlo (\wedge I) nám zajistí, aby se na seznam vyčleněných výroků dostaly všechny výroky, které mají být vyčleněné, a pravidla ($\wedge E1^*$) a ($\wedge E2^*$) nám zajistí, aby se tam nedostaly žádné z těch, které vyčleněné být nemají.

Všimněme si dále, že řekneme-li, že nepatří-li na seznam A , pak tam nepatří ani $(A \wedge B)$, je to v podstatě totéž, jako kdybychom řekli, že patří-li tam $(A \wedge B)$, pak tam patří i A . Platí-li totiž to první, musí platit i to druhé a naopak. Takže pravidla ($\wedge E1^*$) a ($\wedge E2^*$) můžeme, jak se zdá, transformovat do podoby

$$\begin{aligned} (\wedge E1) \quad & (A \wedge B) \vdash A \\ (\wedge E2) \quad & (A \wedge B) \vdash B. \end{aligned}$$

Pravidla ($\wedge E1$) a ($\wedge E2$) nám ale už opět říkají, co se na seznam *má* přidat – jak tedy mohou zajistit, aby se tam nepřidalo to, co se tam přidat *nemá* ? Vtip

je v tom, že pravidla ($\wedge E1$) a ($\wedge E2$) promítnou přidání jakékoli nepatřičné konjunkce dolů až na jednoduché výroky, a tak se nám jako výsledek přidání jakékoli nepatřičné konjunkce v seznamu objeví i některé jednoduché výroky, které tam nepatří. Takže jakákoli nepatřičnost kdekoli v seznamu se promítne do konfliktu s výchozím seznamem vyčleněných jednoduchých výroků.

4. Negace

Představme si nyní, že jazyk ($J\wedge$) rozšíříme o další způsob, jak činit z výroků složitější výroky – přidáme symbol \neg , který, jak je obvyklé, reglementuje zápor v přirozeném jazyce, takže výrok $\neg A$ má být vyčleněný právě tehdy, když výrok A vyčleněný není – jinými slovy výrok $\neg A$ patří na seznam vyčleněných výroků právě tehdy, když na něj nepatří A , a naopak.

Všimněme si, že pravidlo, které jsme právě stanovili, sice určuje, které negované výroky na seznam patří a které ne, ale *není* použitelné pro *generování* tohoto seznamu. To je situace dramaticky odlišná od té, kterou jsme měli v případě \wedge : tam nám pravidlo ($\wedge I$) (případně spolu s pravidly ($\wedge E1$) a ($\wedge E2$)) jak vymezovalo, co na tento seznam patří, tak tento seznam generovalo. Otázkou tedy nyní je, zda můžeme dostat pravidla, která by nám generovala seznam všech vyčleněných výroků i v jazyce s negací – řekněme mu ($J\wedge\neg$).

Výše diskutované pravidlo (a řekněme mu raději *princip*, abychom zdůraznili, že nejde o pravidlo generativní), můžeme rozdělit do dvou částí:

- ($\neg 1$) Je-li na seznamu A , nepatří tam $\neg A$.
- ($\neg 2$) Jestliže na seznamu není a nikdy nebude A , patří tam $\neg A$.

Je nyní možné, tak jako v případě konjunkce, obecně říci o výroku, který obsahuje třeba více než jednu negaci, zda je nebo není vyčleněný? Pokud neobsahuje konjunkci, pak může být jedině tvaru $\neg\dots\neg A$ a na seznam patří právě tehdy, když je těch negací lichý počet a A není vyčleněný, nebo je negací počet sudý a A vyčleněný je. Jak to ale bude s výroky, které obsahují jak negace, tak konjunkce? Ani v tomto případě není rozhodnutí těžké. Víme-li, které jednoduché výroky jsou vyčleněné, víme tím, které jejich konjunkce a negace jsou vyčleněné, a tedy které konjunkce a negace těchto konjunkcí a negací jsou vyčleněné atd.

Tak například máme-li výrok (**vepř(Pašík)** \wedge \neg (**vepř(Pašík)** \wedge \neg (\neg **pes(Pašík)** \wedge **vepř(Brok)**))), pak to, zda je vyčleněný, snadno zjistíme následujícím způsobem. Výrok **pes(Pašík)** vyčleněný není, tudíž výrok

\neg pes(Pašík) vyčleněný je. Protože výrok **vepř(Brok)** vyčleněný není, není vyčleněná konjunkce (\neg pes(Pašík) \wedge **vepř(Brok)**), a tudíž je vyčleněná její negace $\neg(\neg$ pes(Pašík) \wedge **vepř(Brok)**). Výrok **vepř(Pašík)** je také vyčleněný, takže je vyčleněná celá konjunkce (**vepř(Pašík)** \wedge $\neg(\neg$ pes(Pašík) \wedge **vepř(Brok)**)), a tudíž není vyčleněná její negace $\neg(\mathbf{vepř(Pašík)} \wedge \neg(\neg$ pes(Pašík) \wedge **vepř(Brok)**)). Takže ač výrok **vepř(Pašík)** je vyčleněný, jeho konjunkce s touto nevyčleněnou negací, která tvoří celý zkoumaný výrok, vyčleněná není.

Principy (–1) a (–2) skutečně nejsou generativní pravidla, tj. nepodávají nám žádný přímý návod, jak konstruovat seznam vyčleněných výroků. (–1) nám pouze říká, jak seznam *nerozšiřovat*, zatímco (–2) nám sice říká, co na něj přidat, ale za okolností, u kterých není úplně jasné, zda je můžeme vůbec někdy s jistotou rozpoznat. Jak můžeme vědět, že *A* na seznamu *nikdy nebude*?

Zaveďme opět trochu terminologie. Seznam, na kterém není žádný výrok spolu se svou negací, tedy není tam žádné *A* spolu s $\neg A$, budeme nazývat *konzistentní*, v opačném případě mu budeme říkat *nekonzistentní*. Seznam, který obsahuje negaci každého výroku, který neobsahuje (tedy obsahuje $\neg A$, vždy když neobsahuje *A*) budeme nazývat (*syntakticky*) *úplný*. (Budeme také někdy říkat, že seznam je konzistentní resp. úplný s ohledem na nějaký druh výroků, například s ohledem na jednoduché výroky, obsahuje-li nejvýše resp. alespoň jeden z dvojice *A* a $\neg A$ pro každý výrok *A* tohoto druhu.) Můžeme tedy říci, že našim konečným cílem z hlediska negace je konzistentní a syntakticky úplný seznam. To ale stále ještě nemáme předpis pro generování takového seznamu. Lze se k němu dopracovat?

Jednou z cest, jak můžeme postupovat, je ta, že se na negaci budeme dívat jako na prostředek generování seznamu *nevyčleněných* výroků, o jakém jsme uvažovali výše: můžeme si představit, že přítomnost $\neg A$ na tomto seznamu značí, že *A* nepatří mezi vyčleněné výroky. Předpokládáme, že jednoduché výroky na vyčleněné a nevyčleněné rozdělené máme, to jest seznam všech vyčleněných jednoduchých výroků bereme za dané východisko. Přidejme tedy do tohoto výchozího seznamu i negace všech nevyčleněných jednoduchých výroků. Tak bude seznam obsahovat pro každý jednoduchý výrok buďto jej, nebo jeho negaci (tj. bude *úplný* s ohledem na své *jednoduché* výroky). Teď jde o to ho rozšířit na všechny výroky jazyka.

Budeme postupovat indukci. Mějme výrok *V* a předpokládejme, že pro všechny jednodušší výroky už platí, že je-li výrok vyčleněný, je na seznamu on sám, a není-li vyčleněný, je tam jeho negace. Chceme zajistit, aby totéž pak platilo i pro *V*: to pak zjevně povede k výsledku, že to bude platit pro všechny výroky.

Je-li V složený, může být tvaru $(A \wedge B)$ nebo $\neg A$. Vezměme nejprve první z těchto případů. Pravidlo $(\wedge I)$ nám říká, že tento výrok je na seznamu tehdy, když na něm jsou A i B ; a jenom v tom případě. To znamená, že jestliže na něm A nebo B chybí, nepatří na něj ani $A \wedge B$. Ale předpokládáme-li, že náš seznam už je úplný pro všechny výroky jednodušší než $A \wedge B$, pak na něm v takovém případě bude $\neg A$ nebo $\neg B$. Takže když přidáme pravidla

$$\begin{aligned} (\neg \wedge I1) \quad & \neg A \vdash \neg(A \wedge B) \text{ a} \\ (\neg \wedge I2) \quad & \neg B \vdash \neg(A \wedge B), \end{aligned}$$

budeme vědět, že budeme mít na výsledném seznamu negace všech těch konjunkcí, které na tomto seznamu nebudou.

Zbývá nám druhá možnost, totiž že V je $\neg A$. Víme, že je-li A vyčleněný, je na seznamu on sám, a není-li vyčleněný, je tam $\neg A$. Víme tedy, že je-li $\neg A$ vyčleněný, je na seznamu. Co když ale $\neg A$ vyčleněný není? V takovém případě víme, že je na seznamu A , ale potřebovali bychom, aby tam byl i $\neg \neg A$. To zřejmě zajistíme přidáním pravidla

$$(\neg \neg I) \quad A \vdash \neg \neg A.$$

Uvedená pravidla nám tedy dovolí rozšířit každý konzistentní a úplný seznam jednoduchých vyčleněných výroků na konzistentní a úplný seznam všech vyčleněných výroků.

Máme tedy nyní následující formulaci jazyka $(J \wedge \neg)$:

Jazyk $(J \wedge \neg)$:

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok; přičemž jmény jsou **Azor**, **Brok** a **Pašík**, a predikáty jsou **pes**, **kůň** a **vepř**.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. **pes(Azor)**, **pes(Brok)**, **vepř(Pašík)**, \neg **pes(Pašík)**, \neg **vepř(Azor)**, \neg **vepř(Brok)**, \neg **kůň(Azor)**, \neg **kůň(Brok)**, \neg **kůň(Pašík)**

2. $(\wedge I) A, B \vdash (A \wedge B)$
3. $(\neg\wedge I1) \neg A \vdash \neg(A \wedge B)$
4. $(\neg\wedge I2) \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
5. $(\neg\neg I) A \vdash \neg\neg A.$

5. Logika

Logika se nezajímá o žádný konkrétní jazyk; zajímá se o zákonitosti, které platí pro *každý* jazyk nějakého druhu, například pro každý jazyk s operátory \wedge a \neg řídicími se výše uvedenými pravidly (bez ohledu na to, jakým dalším výrazivem disponují). Můžeme například zkoumat, existuje-li nějaký druh výroků, který by vždy patřil na seznam vyčleněných výroků v kterémkoli takovém jazyce. Je zřejmé, že v jazyce typu $(J\wedge)$ takový druh nenajdeme: zřejmě totiž neexistuje vůbec žádný výrok, který by byl na každém takovém seznamu, natož pak druh výroků. (Neexistuje totiž žádný jednoduchý výrok, který by musel být na každém takovém seznamu, a vzhledem k tomu, že výrok tvaru $A \wedge B$ by se dostal na každý seznam jenom tehdy, kdyby tam již byly A a B , nebude ani žádný takový výrok na každém seznamu.)

Vezmeme-li ale jazyk typu $(J\wedge\neg)$, situace se mění. Tak například každý výrok tvaru $\neg(A \wedge \neg A)$ nutně patří na seznam vyčleněných výroků každého jazyka takového typu. To plyne z následující úvahy. Podle $(\neg I)$ nepatří na žádný takový seznam A současně s $\neg A$. To znamená, že tam nepatří ani $A \wedge \neg A$. (Patří tam jedině konjunkce vygenerované pravidlem $(\wedge I)$, a toto pravidlo nám $A \wedge \neg A$ vygenerovat nemůže.) Ale nepatří-li na seznam $A \wedge \neg A$, pak tam podle pravidla $(\neg 2)$ patří $\neg(A \wedge \neg A)$.

Jsmo schopni jakýkoli výrok tvaru $\neg(A \wedge \neg A)$ v rámci jazyka $(J\wedge\neg)$ dokázat (to jest vygenerovat ho v rámci seznamu vyčleněných výroků, bez ohledu na to, co je A za výrok)? Odpověď na tuto otázku je pozitivní. Podle předpokladu můžeme pro každý výrok A dokázat buďto jej, nebo jeho negaci. Předpokládejme tedy, že je dokazatelný A . Pak je pomocí $(\neg\neg I)$ dokazatelný i $\neg\neg A$, a $\neg(A \wedge \neg A)$ je pak dokazatelný pomocí $(\neg\wedge I2)$. Není-li naopak dokazatelný A , ale $\neg A$, je $\neg(A \wedge \neg A)$ dokazatelný přímo pomocí $(\neg\wedge I1)$.

Můžeme ale $\neg(A \wedge \neg A)$ dokázat *obecně*, to jest aniž bychom mohli předpokládat, že je dokazatelný A , či že je dokazatelný $\neg A$? To je zřejmě problém. Jediná dvě pravidla, která nás mohou vést k závěru tvaru $\neg(A \wedge \neg A)$, jsou $(\neg\wedge I1)$ a $(\neg\wedge I2)$, a nemáme-li k dispozici ani A , ani $\neg A$, je tento závěr nedosažitelný. Zjevně bychom tedy potřebovali nějaká pravidla pro genero-

vání seznamu, která by odpovídala principům $(\wedge 1)$ a $(\wedge 2)$. Lze o nějakých takových pravidlech uvažovat?

Pokud jde o $(\neg 1)$, zdá se, že v podstatě jediný způsob, jak se můžeme tomuto principu alespoň trochu přiblížit, je pravidlo

$$(\neg 1^*) \quad A, \neg A \vdash B$$

Toto pravidlo říká, že je-li na seznamu nějaký výrok spolu se svou negací, pak tam může být už cokoli. To se zdá být jenom slabý odvar z principu $(\neg 1)$: zřejmě nám *nezabrání* přidat na seznam A i $\neg A$, pouze způsobí, že v takovém případě se seznam rozroste už o úplně všechno. (Budeme mít tedy už jenom jedinou nekonzistentní teorii, totiž teorii obsahující vůbec všechny výroky.)

Principu $(\neg 2)$ se zase pomocí odvozovacích pravidel dokážeme neuměle přiblížit tak, že formulujeme jakési „metaprávidlo“, to jest pravidlo, které nám ze dvou odvozovacích pravidel vygeneruje nové odvozovací pravidlo

$$(\neg 2^*) \quad \text{jestliže } X, A \vdash B \text{ a } X, \neg A \vdash B, \text{ pak } X \vdash B$$

Všimněme si, že máme-li $(\neg 1^*)$ a $(\neg 2^*)$, můžeme už dokázat $\neg(A \wedge \neg A)$ obecně – tedy dokázat, že je $\neg(A \wedge \neg A)$ odvoditelný z prázdné množiny předpokladů. K tomu nám, vzhledem k $(\neg 2^*)$, zřejmě stačí dokázat, že $\neg(A \wedge \neg A)$ je odvoditelný jak z $(A \wedge \neg A)$, tak z $\neg(A \wedge \neg A)$. Protože to druhé je triviální, stačí dokázat to první:

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1. $(A \wedge \neg A)$ | předpoklad |
| 2. $\neg A$ | z 1. pomocí $(E\wedge 2)$ |
| 3. $\neg(A \wedge \neg A)$ | z 2. pomocí $(\neg\wedge I1)$ |

Navíc lze ukázat, že pravidla, která jsme dosud formulovali, nám už dovolují *dokázat* všechny výroky, které patří na seznam vyčleněných výroků.

Jako vedlejší produkt těchto úvah jsme dostali i rozšířenou formulaci jazyka $(J\wedge\neg)$:

Jazyk $(J\wedge\neg)$:

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok; přičemž jmény jsou **Azor**, **Brok** a **Pašík**, a predikáty jsou **pes**, **kůň** a **vepř**.

2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. **pes(Azor), pes(Brok), vepř(Pašík), \neg pes(Pašík), \neg vepř(Azor), \neg vepř(Brok), \neg kůň(Azor), \neg kůň(Brok), \neg kůň(Pašík)**
2. $(\wedge I) A, B \vdash (A \wedge B)$
3. $(\neg \wedge I1) \neg A \vdash \neg(A \wedge B)$
4. $(\neg \wedge I2) \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
5. $(\neg \neg I) A \vdash \neg \neg A$
6. $(\neg 1^*) A, \neg A \vdash B$
7. $(\neg 2^*)$ jestliže $X, A \vdash B$ a $X, \neg A \vdash B$, pak $X \vdash B$

6. Formální jazyk

Zabýváme-li se logikou, můžeme se namísto konkrétního jazyka zabývat jenom jazykovou formou, která bude ztělesňovat to, co je společné všem relevantním jazykům. Takovou formu dostaneme, když v jazyce, který máme, nahradíme konkrétní výrazivo, s výjimkou toho logického, „prázdnými“ symboly – parametry. Takže namísto jmen **Azor**, **Brok** a **Pašík** a predikátů **pes**, **kůň** a **vepř** budeme mít například parametry a, b, c, \dots a P, Q, R, \dots . Žádný z „výroků“ (kterým je již teď lépe říkat *formule*) takového formálního jazyka nebude vyčleněný; a seznam jeho vyčleněných formulí pak bude sestávat z těch, které budou udávat tvary výroků vyčleněných v jakémkoli jazyce. (Prokážeme-li totiž, že je nějaká formule v tomto jazyce vyčleněná, pak můžeme zcela analogicky prokázat, že je ve svém jazyce vyčleněná jakákoli formule tohoto tvaru.) Navíc obráceně všechny formule vyčleněné v každém jazyce budou vyčleněny i v tomto jazyce (což plyne prostě z toho, že i on sám je jazykem příslušného tvaru).

Takovému formálnímu jazyku můžeme také říkat *logika*; a každému konkrétnímu jazyku této formy pak můžeme říkat *jazyk v rámci této logiky*. To, co jsme právě konstatovali, pak můžeme vyjádřit tak, že výroky nějakého tvaru budou vyčleněny v každém jazyce v rámci naší logiky *právě tehdy*, když bude tento tvar vyčleněnou formulí této logiky.

	Logika ($L \wedge \neg$)	Jazyk ($J \wedge \neg$)
Jména:	neurčena (v případě nutnosti používáme generické symboly a, b, c, \dots)	Azor, Brok, Pašík
Predikáty:	neurčeny (v případě nutnosti používáme generické symboly P, Q, R, \dots)	pes, kůň, vepř
Jednoduché výroky:	neurčeny (v případě nutnosti používáme symboly $P(a), Q(a), P(b), \dots$ nebo A, B, C)	jákýkoli predikát následovaný jakýmkoli uzávorkovaným jménem, např. pes(Azor), pes(Brok), vepř(Azor), ...
Složené výroky:	jakékoli dva výroky spojené \wedge ; jakýkoli výrok s předřazeným \neg	
Vyčleněné jednoduché výroky:	-	pes(Azor), pes(Brok), vepř(Brok)
Vyčleněné složené výroky:	$(\wedge I) A, B \vdash (A \wedge B)$ $(\neg \wedge I1) \neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ $(\neg \wedge I2) \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ $(\neg \neg I) A \vdash \neg \neg A$ $(\neg 1^*) A, \neg A \vdash B$ $(\neg 2^*)$ jestliže $X, A \vdash B$ a $X, \neg A \vdash B$, pak $X \vdash B$	

Můžeme se nyní, analogicky jako jsme v konkrétních jazycích tvořili seznamy jejich vyčleněných výroků, pokusit v rámci formálního jazyka vytvořit seznam výroků, které budou vyčleněné ve všech jazycích příslušné formy. Jinými slovy to budou výroky, které budou vyčleněné, aniž bychom cokoli předpokládali o mimo-logickém výrazivu jazyka – o tom, kolik má jmen či predikátů, ani o tom, které jeho jednoduché výroky jsou vyčleněné.

7. Přirozená dedukce

Problém, na který narážíme s naší dosavadní charakterizací vyčleněných výroků v rámci jazyka $(L \wedge \neg)$, je ten, že obsahuje ‚metapříklad‘ (\neg^2^*) . To, nám, jak jsme viděli, neslouží k vyvozování výroků z výroků, ale pracuje „o úroveň výš“: slouží k odvozování pravidel z pravidel. V (hilbertovském) axiomatickém systému, s jakým pracuje Mendelson a k jakému bychom tedy měli směřovat my, ovšem není pro taková pravidla místo – jak bychom se ho tedy mohli zbavit? Provedeme to tak, že dočasně uhneme z cesty směřující k hilbertovské axiomatizaci a pokusíme se vybudovat systém gentzenovské přirozené dedukce; na tu původní cestu se pak vrátíme až tehdy, když zavedeme implikaci.³

Přesun k přirozené dedukci uskutečníme tak, že se namísto seznamu vyčleněných výroků budeme snažit vybudovat seznam vyčleněných *sekventů*, kde sekvent je, neformálně řečeno, zachycení kroku od určitých premis k určitému závěru: Je-li X seznam výroků a A výrok, je $X \vdash A$ (*jednoduchý*) *sekvent*.⁴ A tak jak jsme se dosud snažili vybudovat seznam vyčleněných výroků (který měl odpovídat seznamu pravdivých vět) se nyní můžeme pokusit vybudovat seznam vyčleněných sekventů (které by měly odpovídat případům správných odvození).

Jaký bude vztah mezi vyčleněnými výroky a vyčleněnými sekventy? A patří na seznam logicky vyčleněných výroků právě tehdy, když patří na seznam vyčleněných výroků jakéhokoli jazyka v rámci příslušné logiky; a $X \vdash A$ bude patřit mezi logicky vyčleněné sekventy právě tehdy, když každý seznam vyčleněných výroků, který obsahuje všechny prvky X , obsahuje i A . Z toho je jasné, že výrok A je logicky vyčleněný právě tehdy, když je logicky vyčleněný sekvent $\vdash A$ (s prázdným seznamem předpokladů). A chceme-li „přeložit“ naše dosavadní vymezení naší logiky do nové podoby, ve které půjde o seznam nikoli vyčleněných výroků, ale o seznam vyčleněných sekventů, nemusíme, zdá se, dělat vlastně nic, protože návod na vybudování seznamu vyčleněných výroků můžeme rovnou číst jako návod na budování seznamu vyčleněných sekventů – $(\wedge I)$, $(\neg \wedge I1)$, $(\neg \wedge I2)$, $(\neg \neg I)$ a $(\neg 1^*)$ stanovují výcho-

³ Podrobněji o hilbertovských a gentzenovských systémech viz dodatky ve Svoboda – Peregrin (2009).

⁴ Gentzen (1934, 1936), který tento termín zavádí, připouští sekventy, které mají na pravo od \vdash nejenom jediný výrok, ale stejně tak jako nalevo celý seznam. My se omezujeme na jednodušší variantu, která odpovídá přirozené dedukci.

zí typy sekventů, které jsou na seznamu, a $(\neg 2^*)$ určuje, jak tento seznam rozšiřovat.

To, že to je takto jednoduché, je ale jenom zdání. Tato pravidla nás nepovedou k takovému seznamu sekventů, jaký chceme; to jest k takovému, na kterém budou všechny sekventy odpovídající pravidlům, která platí v jakýchkoli jazycích v rámci naší logiky. Vezměme například platný sekvent $A, B \vdash (A \wedge B)$. Ten na seznamu bude (díky axiomu $(\wedge I)$). Ale co třeba sekvent $A, B, C \vdash (A \wedge B)$? Ten je jistě také platný: stačí-li k přítomnosti výroku $(A \wedge B)$ na seznamu vyčleněných výroků přítomnost výroků A a B , pak tím spíše k tomu stačí přítomnost A, B a C . Nicméně sekvent $A, B, C \vdash (A \wedge B)$ z $(\wedge I)$, $(\neg \wedge I1)$, $(\neg \wedge I2)$, $(\neg \neg I)$ a $(\neg 1^*)$ pomocí $(\neg 2^*)$ nedostaneme.

Ukazuje se tedy, že potřebujeme další odvozovací pravidla; v našem konkrétním případě pravidlo

$$(E) \quad \text{jestliže } X, Y \vdash A, \text{ pak } X, B, Y \vdash A$$

Toto pravidlo je v jistém smyslu triviální: netýká se žádných specifických logických operátorů, jenom nám říká, že rozšiřujeme-li u platného sekventu seznam předpokladů, jeho platnost tím nijak neohrozíme. Podobně neohrozíme platnost sekventu ani tehdy, když mezi jeho předpoklady vyškrtneme duplicitu či když jeho předpoklady nějak přeházíme; což nám říkají následující metapřavidla:⁵

$$(C) \quad \text{jestliže } X, A, A, Y \vdash B, \text{ pak } X, A, Y \vdash B$$

$$(P) \quad \text{jestliže } X, A, B, Y \vdash C, \text{ pak } X, B, A, Y \vdash C$$

Pak musíme zachytit fakt, že odvození, která jsou zachycována sekventy, se mohou „skládat“: dokážu-li z předpokladů X závěr A a potřebuji-li A , spolu s nějakými dalšími předpoklady Y , k důkazu závěru B , pak B zřejmě dokážu z předpokladů X a Y .

$$(T) \quad \text{platí-li } X, A, Y \vdash B \text{ a } Z \vdash A, \text{ platí i } X, Z, Y \vdash B$$

Nakonec musím, jak se ukazuje, přidat ještě jeden (triviální) axiom

$$(I) \quad X, A, Y \vdash A$$

⁵ Předpokládáme, že X je seznam výroků (u kterého může hrát roli pořadí a ve kterém se některé výroky mohou vyskytovat opakovaně). Kdybychom jej brali jako množinu, byla by tato dvě pravidla nadbytečná.

Doplníme-li naše nové vymezení naší logiky tímto způsobem, dostaneme, jak se dá ukázat, vymezení, které je úplné.

Jazyk ($L \wedge \neg$):

Výroky:

1. A, B, C, \dots
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \wedge B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Sekventy:

1. Je-li X (konečná) posloupnost výroků a je-li A výrok, je $X \vdash A$ sekvent.

Vyčleněné sekventy:

1. (I) $X, A \vdash A$
2. (\wedge I) $A, B \vdash (A \wedge B)$
3. ($\neg \wedge$ I1) $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$
4. ($\neg \wedge$ I2) $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
5. ($\neg \neg$ I) $A \vdash \neg \neg A$
6. (\neg 1*) $A, \neg A \vdash B$
7. (\neg 2*) $X, A \vdash B; X, \neg A \vdash B / X \vdash B$
8. (E) $X \vdash A / X, B \vdash A$
9. (C) $X, A, A \vdash B / X, A \vdash B$
10. (P) $X, A, B \vdash C / X, B, A \vdash C$
11. (T) $X, A \vdash B; Y \vdash A / X, Y \vdash B$

8. Klasická výroková logika

Vymezení jazyka ($L \wedge \neg$), jak jsme se k němu právě dopracovali, fakticky odpovídá *klasické výrokové logice*; zatím ale ještě v podobě, která je poněkud příliš složitá. Pokusme se tedy tento systém zjednodušit.

Zprv, všimněme si, že pravidlo ($\neg \neg$ I) je odvoditelné z ostatních:

1. $A, \neg\neg A \vdash \neg\neg A$ (I)
2. $A, \neg A \vdash \neg\neg A$ ($\neg 1^*$)
3. $A \vdash \neg\neg A$ z 1. a 2. podle ($\neg 2^*$)

To jest toto pravidlo můžeme z našeho systému bez náhrady vyškrtnout.

Dále odvodíme jedno pomocné pravidlo, konkrétně

($\neg 3^*$) $X, A \vdash B / X, \neg B \vdash \neg A$:

1. $X, A \vdash B$ předpoklad
2. $B, \neg B \vdash \neg A$ ($\neg 1^*$)
3. $X, A, \neg B \vdash \neg A$ z 1. a 2. pomocí (T)
4. $X, \neg A, \neg B \vdash \neg A$ (I)
5. $X, \neg B \vdash \neg A$ z 3. a 4. pomocí ($\neg 2^*$)

Toto pravidlo nám nyní dovoluje nahradit axiomy $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ a $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ axiomy ($E \wedge 1$) a ($E \wedge 2$), tj.

($\wedge E1$) $(A \wedge B) \vdash A$
 ($\wedge E2$) $(A \wedge B) \vdash B$.

Další pomocné pravidlo, které dokážeme, je

($\neg 4^*$) $\neg\neg A \vdash A$:

1. $\neg\neg A, \neg A \vdash A$ ($\neg 1^*$)
2. $\neg\neg A, A \vdash A$ (I)
3. $\neg\neg A \vdash A$ z 1. a 2. pomocí ($\neg 2^*$)

Vraťme se k našemu důkazu, že toho, že $\neg(A \wedge \neg A)$ patří na každý seznam – nyní ho můžeme pojmut jako důkaz pravidla $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$:

1. $A, \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ ($\neg 1^*$)
2. $(A \wedge \neg A) \vdash A$ ($E \wedge 1$)
3. $(A \wedge \neg A), \neg A \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 1. a 2. pomocí (T)
4. $(A \wedge \neg A) \vdash \neg A$ ($E \wedge 2$)
5. $(A \wedge \neg A), (A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 3. a 4. pomocí (T)
6. $(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 5. pomocí (C)
7. $\neg(A \wedge \neg A) \vdash \neg(A \wedge \neg A)$ (I)
8. $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$ z 6. a 7. pomocí ($\neg 2^*$)

9. Implikace

Samozřejmě můžeme uvažovat o jazycích, které mají jiné „logické spojky“ než \wedge a \neg . Některé můžeme také vyrobit z těch, které již máme. Zavedme například standardním způsobem implikaci:

$$(A \rightarrow B) \equiv_{\text{Def.}} \neg(A \wedge \neg B)$$

Lze snadno ukázat, že pro takto zavedenou implikaci platí, co by pro ni platit mělo, to jest

$$\begin{aligned} (\rightarrow E) \quad & A, (A \rightarrow B) \vdash B \\ (\rightarrow I) \quad & X, A \vdash B / X \vdash (A \rightarrow B) \end{aligned}$$

To mimo jiné znamená, že $X, A \vdash B$ je pravidlem právě tehdy, když je pravidlem $X \vdash (A \rightarrow B)$ (to je dobře známá *věta o dedukci*).

Nás ale více zajímá případ, kdy vezmeme \rightarrow za primitivní symbol a sestavíme axiomatický systém, v němž jsou $(\neg 1^*)$ a $(\neg 2^*)$ doplněny následujícími axiomy

$$\begin{aligned} (\rightarrow E) \quad & A, (A \rightarrow B) \vdash B \\ (\rightarrow I) \quad & X, A \vdash B / X \vdash (A \rightarrow B) \end{aligned}$$

Konjunkce je pak definována jenom jako zkratka:

$$(A \wedge B) \equiv_{\text{Def.}} \neg(A \rightarrow \neg B).$$

Ukažme, že platí to, co jsme v předchozí verzi brali za axiomy pro konjunkci. Rozepíšeme-li v nich konjunkce podle definice, budou vypadat takto:

$$\begin{aligned} (\wedge I) \quad & A, B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \\ (\wedge E1) \quad & \neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A \\ (\wedge E2) \quad & \neg(A \rightarrow \neg B) \vdash B \end{aligned}$$

Jejich důkazy jsou pak následující:

$$\begin{array}{ll} (\wedge I): & \\ 1. & A, (A \rightarrow \neg B) \vdash \neg B \qquad (\rightarrow E) \\ 2. & A, \neg\neg B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \qquad \text{z 1. pomocí } (\neg 3^*) \\ 3. & B \vdash \neg\neg B \qquad (\neg\neg I) \\ 4. & A, B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \qquad \text{z 2. a 3. pomocí } (\neg I) \end{array}$$

(\wedge E1):

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $\neg A, A \vdash \neg B$ | ($\neg 1^*$) |
| 2. $\neg A \vdash (A \rightarrow \neg B)$ | z 1. pomocí (\rightarrow I) |
| 3. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg\neg A$ | z 2. pomocí ($\neg 3^*$) |
| 4. $\neg\neg A \vdash A$ | ($\neg 4^*$) |
| 5. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A$ | z 3. a 4. pomocí (T) |

Důkaz (\wedge E2) je přímočaře analogický.

Od tohoto momentu je cesta k výrokové části Mendelsonova axiomatického systému cestou ne příliš zajímavé (i když ne vždy úplně jednoduché) „axiomatické gymnastiky“, kterou tu už předvedeme jenom v náznaku. Je zřejmé, že díky pravidlu (\rightarrow I) můžeme jakýkoli axiom tvaru $A_1, \dots, A_n \vdash A$ nahradit axiomem $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow A$ a potažmo axiomem $\vdash A_1 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow A) \dots)$. Tak můžeme axiomy ($\neg 1^*$) a ($\neg 2^*$) nahradit axiomy

$$(\neg 1^{*'}) \quad \vdash (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$$

a

$$(\neg 2^{*'}) \quad \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow B)) \rightarrow B))$$

Navíc, jak lze ukázat, jsou oba tyto dva axiomy ekvivalentní axiomu

$$(\neg 1^{*''}) \quad \vdash (((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A))$$

Důkaz tohoto faktu zde pouze naznačíme. Fakt, že z ($\neg 1^{*''}$) vyplývá z ($\neg 1^{*'}),$ můžeme nahlédnout tak, že nahlédneme, že ($\neg 1^{*'}),$ je ekvivalentní výroku

$$\vdash (((\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow (((\neg\neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg B)) \rightarrow A)),$$

který je instancí ($\neg 1^{*''}$). Fakt, že z ($\neg 1^{*''}$) vyplývá z ($\neg 2^{*'}),$ je možné ukázat tak, že se ukáže, že ($\neg 1^{*''}$) je (díky faktu, že z ($\neg 1^{*''}$) plyne, že $A \rightarrow B$ je ekvivalentní s $\neg B \rightarrow \neg A$) ekvivalentní

$$\vdash (((\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (((\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A)) \rightarrow A)),$$

což je (díky faktu, že z ($\neg 1^{*''}$) plyne $A \rightarrow \neg\neg A$ a $\neg\neg A \rightarrow A$) dále ekvivalentní

$$\vdash (((\neg B \rightarrow A) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow A))).$$

Naopak fakt, že $(\neg 1^{*'})$ vyplývá z $(\neg 1^{*'})$ a $(\neg 2^{*'})$, lze ukázat tak, že se ukáže, že $(\neg 2^{*'})$ je díky $(\neg 1^{*'})$ ekvivalentní

$$\vdash ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B))),$$

což je dále ekvivalentní

$$\vdash ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))).$$

Dále platí, že axiom $(\rightarrow I)$ můžeme nahradit axiomy

$$(\rightarrow I1) \quad \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(\rightarrow I2) \quad \vdash ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$$

Ani tento důkaz nebudeme provádět. Ukázat, že $(\rightarrow I1)$ a $(\rightarrow I2)$ jsou důsledkem $(\rightarrow I)$, není těžké; ukázat, že naopak $(\rightarrow I1)$ je důsledkem $(\rightarrow I)$ a $(\rightarrow I2)$ prakticky znamená dokázat v Mendelsonově systému větu o dedukci (věta 1.9 na str. 37 v Mendelsonově knize).

Nyní se dostáváme k formulaci jazyka $(J \wedge \neg)$, který již, na úrovni výrokové logiky, odpovídá té Mendelsonově:

Jazyk $(L \wedge \neg)$:

Výroky:

1. A, B, C, \dots jsou výroky.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \rightarrow B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Sekventy:

1. Je-li X (konečná) posloupnost výroků a je-li A výrok, je $X \vdash A$ sekvent.

Vyčleněné sekventy:

1. (I) $X, A \vdash A$
2. $(\rightarrow E)$ $A, (A \rightarrow B) \vdash B$
3. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A))$
4. $\vdash ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$

5. $\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A))$
6. (E) $X \vdash A / X, B \vdash A$
7. (C) $X, A, A \vdash B / X, A \vdash B$
8. (P) $X, A, B \vdash C / X, B, A \vdash C$
9. (T) $X, A \vdash B; Y \vdash A / X, Y \vdash B$

Tu už můžeme přímočaře přetransformovat z formátu přirozené dedukce zpět do podoby hilbertovského axiomatického systému:

Jazyk ($L \rightarrow \neg$):

Výroky:

1. Je-li J jméno a P predikát, je $P(J)$ výrok.
2. Jsou-li A a B výroky, je i $(A \rightarrow B)$ výrok.
3. Je-li A výrok, je i $\neg A$ výrok.

Vyčleněné výroky:

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
2. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
3. $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow A))$
4. $A, (A \rightarrow B) \vdash B$

10. Predikátový počet

Přesuňme se nyní dále k predikátové logice, to jest rozšířme náš jazyk o nové druhy výroků obsahujících kvantifikátory. Budeme tedy předpokládat, že máme-li výrok, pak z něj můžeme nový výrok vytvořit tak, že mu předradíme symbol \forall následovaný proměnnou (kde proměnné budou pomocné symboly ze seznamu x, y, z, \dots) a touto proměnnou v něm nahradíme nula nebo více výskytů nějakého jména v tomto výroku.

Jaké výroky tohoto nového druhu teď budou patřit na seznam vyčleněných výroků?

Intuice je tu zřejmá: Výrok tvaru $\forall xA$ patří na seznam, patří-li tam A „pro všechna x “. Co ale přesně znamená ono „pro všechna x “? Explikace, která se

nabízí, je ta, že $\forall xA$ patří na seznam, patří-li tam každý výrok, který vznikne z A tak, že v něm všechny výskyty x nahradíme nějakým jménem. To nás, z jedné strany, vede k neproblematickému pravidlu (kde $A_{[s_2/s_1]}$ značí výrok, který vznikne z A nahrazením všech výskytů symbolu s_1 symbolem s_2):

$$(\forall E) \quad \forall xA \vdash A[a/x],$$

z druhé strany bychom však potřebovali něco jako pravidlo

$$(\forall I) \quad A_1, A_2, A_3, \dots \vdash \forall xA,$$

kde A_1, A_2, A_3, \dots budou výroky, které vzniknou z A nahrazením proměnné x všemi možnými jmény; a toto druhé pravidlo problematické je. Jedním problémem je, že pokud budeme mít jazyk, ve kterém je nekonečno jmen (což není případ jazyka (\bigwedge, \neg) , ale což může jistě vzniknout u jazyka, ve kterém je možné produkovat pomocí funktorů komplexní jména), nebudeme ho moci vůbec formulovat. Druhým problémem je, že se nezdá, že by to pravidlo bylo skutečně obecně přijatelné – pokud připustíme, že může existovat něco, pro co nemáme jméno, pak se zdá být rozumné připustit, že mohou být všechny výroky v antecedentu tohoto pravidla vyčleněné a generalizace v konsekventu může být přesto nevyčleněná.

Zdá se tedy, že pro generalizaci jako závěr potřebujeme nějaké poněkud striktnější předpoklady. Co by se zdálo být k tomu, abychom dokázali $\forall xA$, dostačující, by bylo, kdybychom dokázali A , aniž bychom přitom cokoli předpokládali o x – to by tedy pak byl důkaz vpravdě „pro jakékoli x “. Příslušné pravidlo můžeme formulovat například následujícím způsobem

$$(\forall I') \quad X \vdash A / X \vdash \forall xA, \text{ jestliže } X \text{ neobsahuje } x \text{ jako volnou proměnnou}$$

Není těžké ukázat, že toto pravidlo je ekvivalentní následujícím dvěma:

$$(\forall I'1) \quad \vdash A / \vdash \forall xA$$

$$(\forall I'2) \quad \vdash \forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall xA), \text{ jestliže } B \text{ neobsahuje } x$$

Že z $(\forall I')$ plyne $(\forall I'1)$, je zřejmé (jde jenom o speciální případ); že z něj plyne $(\forall I'2)$ dokážeme následovně (předpokládáme, že B neobsahuje x):

1. $\forall x(B \rightarrow A) \vdash B \rightarrow A$ ($\forall E$)
2. $B, B \rightarrow A \vdash A$ ($\rightarrow E$)
3. $B, \forall x(B \rightarrow A) \vdash A$ z 1. a 2.

- | | |
|---|---------------------------------|
| 4. $B, \forall x(B \rightarrow A) \vdash \forall xA$ | z 3. pomocí ($\forall I'$) |
| 5. $\forall x(B \rightarrow A) \vdash (B \rightarrow \forall xA)$ | z 4. pomocí ($\rightarrow I$) |
| 6. $\vdash \forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall xA)$ | z 5. pomocí ($\rightarrow I$) |

Abychom obráceně dokázali, že z ($\forall I'1$) a ($\forall I'2$) plyne ($\forall I$), postupujme následovně (předpokládáme, že X je A_1, \dots, A_n a že ani jeden z těchto výroků neobsahuje x):

- | | |
|--|--|
| 1. $A_1, \dots, A_n \vdash A$ | předpoklad |
| 2. $\vdash A_1 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots$ | z 1. opakovaným užitím ($\rightarrow I$) |
| 3. $\vdash \forall x(A_1 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots)$ | z 2. pomocí ($\forall I'2$) |
| 4. $\vdash A_1 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow \forall xA) \dots$ | z 3. opakovaným užitím ($\forall I'1$) |
| 5. $A_1, \dots, A_n \vdash \forall xA$ | z 4. opakovaným užitím ($\rightarrow E$) |

11. Závěr

Systém *přirozené dedukce*, jak název napovídá, byl zaveden mimo jiné proto, abychom mohli principy logiky formulovat v „přirozenější“, a tudíž průhlednější podobě. S podobným cílem byly formulovány i některé hilbertovské axiomatizace, jako například ten, který rozebírám v Peregrin (2003, Oddíl 2.2). Pokud ovšem zredukujeme klasickou logiku na konjunktci a negaci, situace se zjednoduší: protože fungování a potažmo axiomatizace konjunktce je zcela průhledná, redukuje se problém nalezení průhledné axiomatizace klasické logiky na problém průhledné axiomatizace negace. My jsme v této práci vyšli z toho, že díváme-li se na logiku jako na nástroj obhospodařování seznamů vyčleněných (pravdivých) výroků, můžeme se na negovaný výrok $\neg A$ dívat jako na prostředek klasifikování výroku A jako *nevychleněného*. To vede k formulaci potřebných axiomů pro negaci, které mohou být dále transformovány do axiomů pro implikaci, tak abychom dospěli k ‚záhadnému‘ axiomatickému systému, který předkládá Mendelson. Touto cestou se pro nás takový systém stane snad trochu méně záhadným.

Literatura

- GENTZEN, G. (1934): Untersuchungen über das logische Schliessen I. *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210.

- GENTZEN, G. (1936): Untersuchungen über das logische Schliessen II. *Mathematische Zeitschrift* 41, 405-431.
- MENDELSON, E. (1964): *Introduction to Mathematical Logic*. Pacific Grove: Wadsworth & Brooks.
- PEREGRIN, J. (2004): *Logika a logiky*. Praha: Academia; opravená verze elektronicky k dispozici na jarda.peregrin.cz.
- SVOBODA, V. – PEREGRIN, J. (2009): *Od jazyka k logice*. Praha: Academia.